Punteggi standardizzati, Distribuzione Normale, Distribuzioni di Probabiltà

Test per le organizzaioni

Ottavia M. Epifania
ottavia.epifania@unipd.it
Margherita Calderan
margherita.calderan@unipd.it

Università di Padova

03/2026

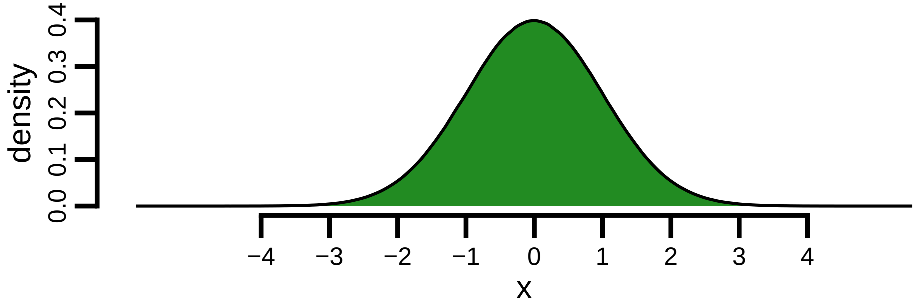
Come si valida un test?

- **I**: Valutazione preliminare
- **II**: Studio esplorativo
- **III**: Studio confermativo
- **IV**: Standardizzazione e taratura

$\rightarrow$ somministrare lo strumento a un campione rappresentativo, definendo norme e punteggi di riferimento.

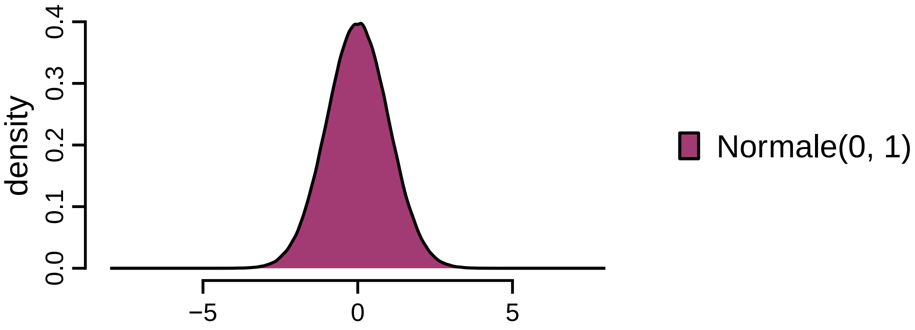
La distribuzione normale

Si presuppone che la caratteristica misurata abbia una **distribuzione nota** nella popolazione. Di solito si assume una **distribuzione normale**:

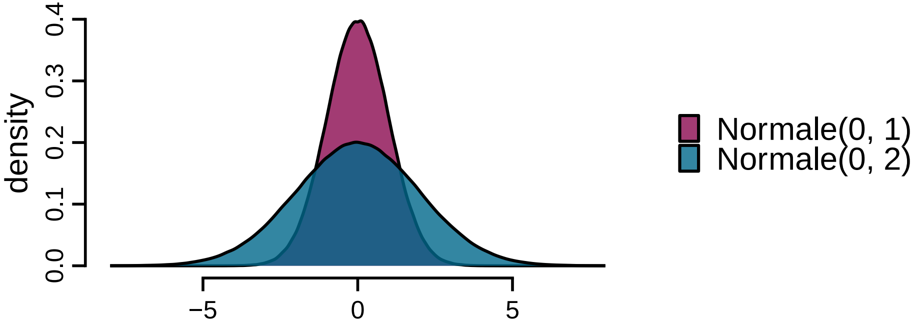


La maggior parte degli individui ha quantità *intermedie* della caratteristica, quindi pochi individui si collocano agli estremi.

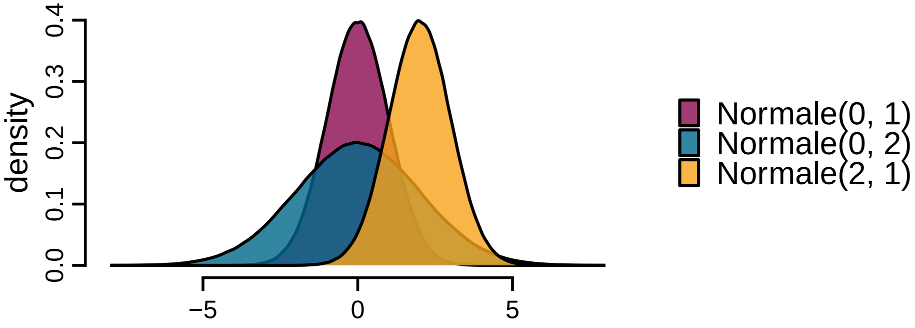
La distribuzione normale è definita da due parametri μ (la media) e σ^2 (varianza):



La distribuzione normale è definita da due parametri μ (la media) e σ^2 (varianza):



La distribuzione normale è definita da due parametri μ (la media) e σ^2 (varianza):



Standardizzazione e taratura

1. Raccogliere i punteggi grezzi sul campione normativo
2. Stimare i parametri della distribuzione (μ, σ)
3. Trasformare i punteggi in scale standardizzate
4. Produrre le **tavole di conversione** grezzi $\rightarrow$ standardizzati

Scale comuni: percentili, **punti Z**, ...

Standardizzazione e taratura

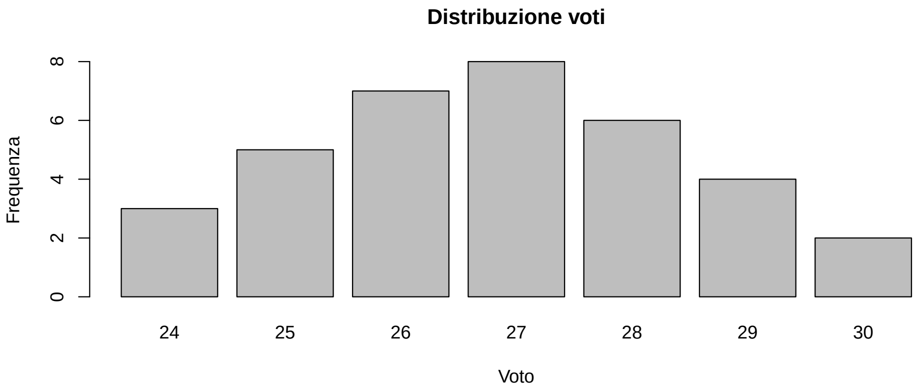
Il campione normativo

Il campione normativo è il gruppo di soggetti le cui risposte al test costituiscono il termine di riferimento per valutare qualsiasi soggetto sottoposto successivamente al test.

- **Rappresentatività** — rispecchia la popolazione target
- **Ampiezza** — migliaia di soggetti per ridurre l'errore di stima

Important

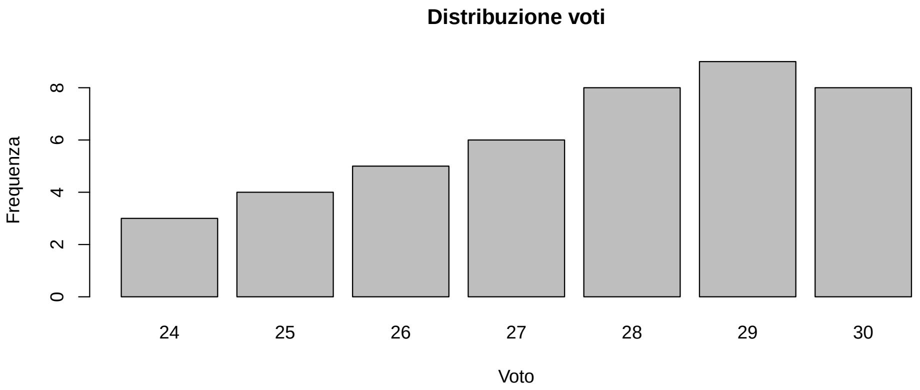
Un buon manuale deve descrivere le caratteristiche del campione normativo.




```
quantile(voti, probs = c(0.025, .05, .10, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 0.95, 0.975))
```

```
 2.5%    5%   10%   25%   50%   75%   90%   95% 97.5%
 24.0  24.0  25.0  26.0  27.0  28.0  29.0  29.3  30.0
```

Standardizzazione e taratura




```r
quantile(voti, probs = c(0.025, .05, .10, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 0.95, 0.975))
```

```
 2.5%    5%   10%   25%   50%   75%   90%   95% 97.5%
 24.0  24.1  25.0  26.0  28.0  29.0  30.0  30.0  30.0
```

Test ansia (scala Likert 1-5), 5 item

Dati Tizio: item1=4, item2=5, item3=4, item4=5, item5=4

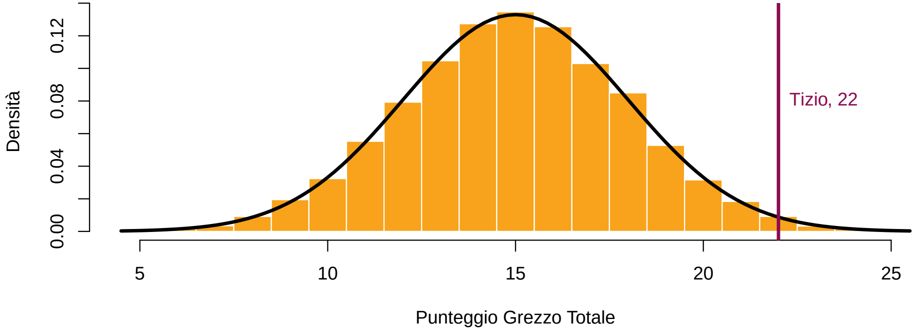
Punteggio **grezzo** globale (somma): 22

95-esimo percentile indicato nel manuale 20

Tizio è ansioso?

Stimare i parametri della distribuzione

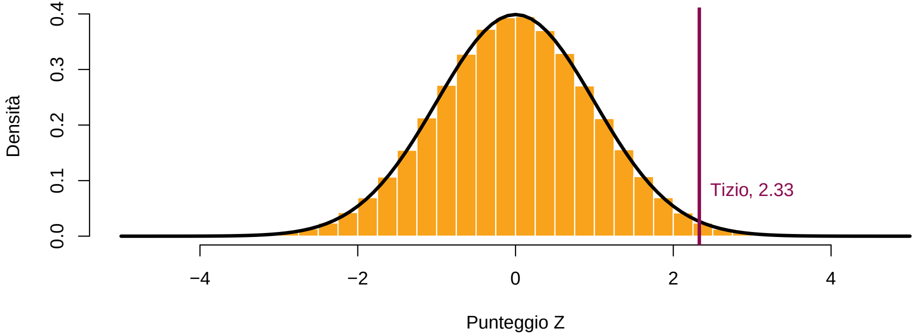
Valori normativi manuale: $\mu = 15$, $\sigma = 3$



2.5%	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%	97.5%
9	10	11	13	15	17	19	20	21

Trasformare i punteggi in scale standardizzate

Punteggio standardizzato $\approx 2.33,\ \mu = 0,\ \sigma = 1$



2.5%	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%	97.5%
-1.96	-1.65	-1.28	-0.67	0.00	0.67	1.28	1.64	1.96

Definizioni

- **Punteggi grezzi**: valori raccolti direttamente dal test
- Non interpretabili direttamente
- **Standardizzazione**: trasformazione in valori interpretabili e confrontabili

Standardizzazione: formula generale

La trasformazione lineare che riscala X verso una distribuzione target con media e deviazione standard desiderate:

$$Y = (X - \bar{X})\frac{s_Y}{s_X} + \bar{Y}$$

dove $\bar{Y}$ e s_Y sono la **media e deviazione standard target** della scala desiderata. Ad esempio:

Scala	$\bar{Y}$	s_Y
Punteggi T	50	10
QI	100	15
Punteggi Z	0	1

Caso speciale: il punto Z

Se la distribuzione target ha $\bar{Y} = 0$ e $s_Y = 1$:

$$Z = (X - \bar{X})\frac{1}{s_X} + 0 = \frac{X - \bar{X}}{s_X}$$

Dove:

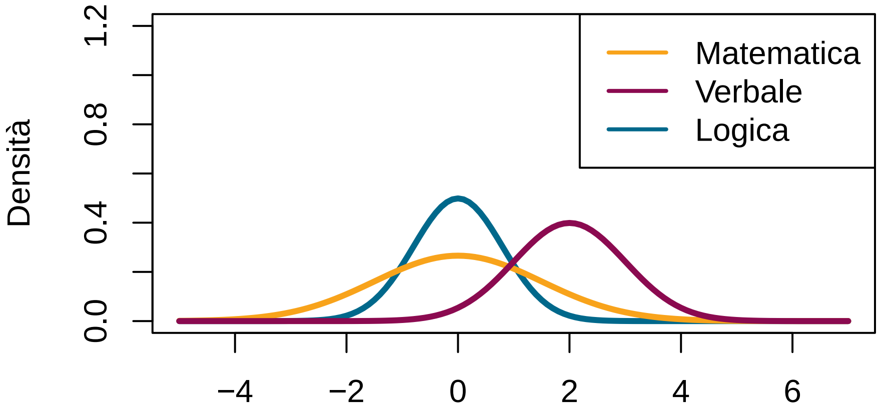
- X è il punteggio grezxo,
- $\bar{X}$ è la media della popolazione
- s_X è la deviazione standard della popolazione

Esprime la distanza di X dalla media in unità di deviazioni standard.

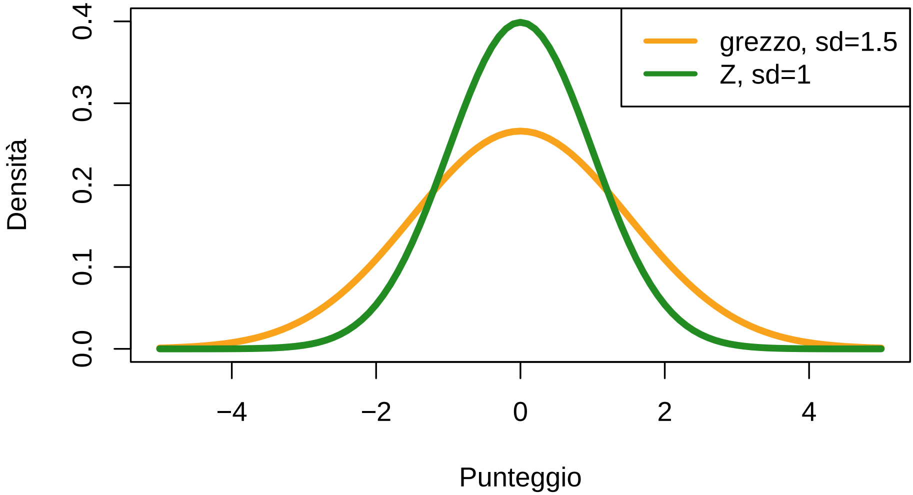
Punti Z

- Quante deviazioni standard e in che direzione dista il punteggio ottenuto da un soggetto rispetto alla media dei punteggi della popolazione?
- Z = -1.96 significa che il soggetto ha ottenuto un punteggio di 1.96 deviazioni standard inferiore rispetto al punteggio medio della popolazione.
- Nel caso in cui la distribuzione dei punteggi del test nella popolazione sia approssimativamente normale, i punti Z possono essere utilizzati per interpretare direttamente le prestazioni dei soggetti

I punteggi standardizzati permettono di confrontare misure su **scale diverse**, perché la standardizzazione le porta tutte sulla **stessa unità di misura**!



Caso speciale: il punto Z



Caso speciale: il punto Z

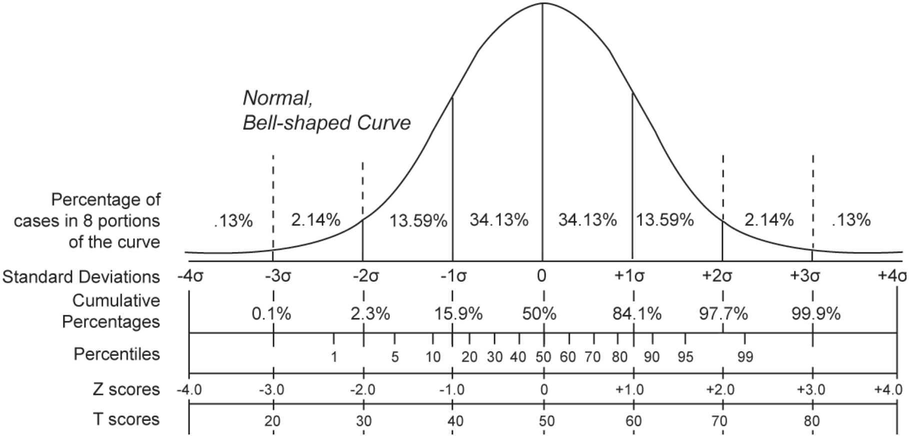


Figure 1: Adattato da **Wikipedia**

Esempio: PSWQ

Il Penn State Worry Questionnaire (PSWQ) è un test monodimensionale e il punteggio totale si ottiene sommando i punteggi grezzi di ciascun item (16, gamma 1-5).

Punteggi elevati del **PSWQ** (corrispondenti a un punto z uguale o superiore a 2) indicano un tratto di personalità incline a preoccuparsi con frequenza e intensità eccessive: una tendenza tipica, non controllabile, generalizzata e non circoscritta a specifici contenuti.

Fonte

Esempio: PSWQ

Punteggio totale del *Penn State Worry Questionnaire:* punteggi medi e deviazioni standard dei partecipanti suddivisi per genere ed età

Età	Maschi		Femmine	
	M	*DS*	*M*	*DS*
18-25	27.2	10.8	33.5	11.9
26-40	25.3	10.3	33.4	11.8
41-60	29	10.8	34.9	10.5
61-86	28.5	9.9	37.6	11.5
Totale	*27.7*	*10.6*	*34.4*	*11.3*

Fonte

Esempio domande

Esempio: PSWQ

Proviamo, è completamente anonimo!

Esempio: PSWQ

Vediamo come sono distribuiti i dati...

Esempio: PSWQ

Calcoliamo i punteggi standardizzati...

Dal punteggio Z alla probabilità

Abbiamo detto che un punteggio PSWQ con $z \geq 2$ indica preoccupazione eccessiva.

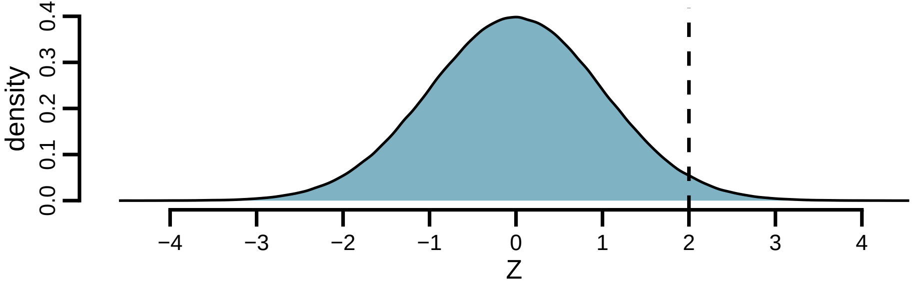
Ma quanto è **raro** ottenere un punteggio del genere?

Domanda

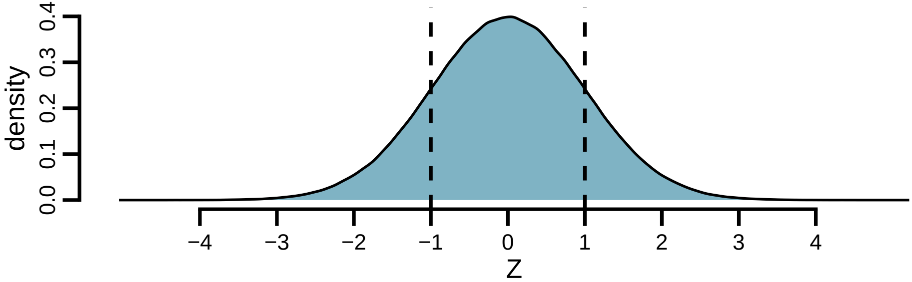
Se scelgo a caso un soggetto dalla popolazione, qual è la **probabilità** che il suo punteggio z sia ≥ 2?

Area = Proporzione

- Per rispondere, dobbiamo calcolare l'**area sotto la curva** a destra di $z = 2$
- Quella area **è** la probabilità: $P(Z \geq 2) \approx 0.023$
- $\Rightarrow$ Solo il **2.3%** della popolazione rientra in quella zona critica



- L'area totale sotto la curva è uguale a 1
- Questo significa che l'area compresa tra due valori z corrisponde alla proporzione di soggetti che ottengono un punteggio in quell'intervallo.



Esempio: l'area tra $z = -1$ e $z = +1$ è circa 0.68, il 68% dei soggetti cade in questo intervallo.

Proporzione = Probabilità

Se scelgo a caso un soggetto dalla popolazione, che assumo provenga da una distribuzione normale standard, qual'è la probabilità che il suo valore cada tra -1 e 1?

$P(-1 \leq Z \leq 1) = 0.68$

Ma cos'è una probabilità?

Introduzione

- In termini generali, la **probabilità** può essere vista come il grado di **fiducia** rispetto al manifestarsi di un evento
- In altre parole, la probabilità è una misura matematica che serve ad esprimere la nostra **incertezza**
- È un numero sempre compreso tra 0 e 1: dove 0 indica un evento impossibile e 1 indica un evento certo.

Un esempio classico è il lancio di una moneta equa: la probabilità di ottenere testa è $\frac{1}{2}$.

In una singola serie di lanci potremmo ottenere più o meno del 50% di teste, ma all'aumentare del numero di lanci la frequenza relativa si avvicina sempre di più a $\frac{1}{2}$.

Spazio campionario, esiti ed eventi

Dato un fenomeno casuale (ad esempio, il lancio di un dado), l'insieme di **tutti i possibili esiti** è detto **spazio campionario** S. Gli elementi di S devono essere:

- **Mutuamente esclusivi**: due esiti non possono verificarsi contemporaneamente, $A \cap B = \emptyset$ (l'intersezione tra gli eventi è nulla)
- **Collettivamente esaustivi**: insieme coprono tutti i casi possibili, $A \cup B = S$

Quando entrambe le condizioni valgono, diciamo che gli eventi costituiscono una **partizione** dello spazio campionario.

Un **evento** E è semplicemente un sottoinsieme di S, cioè un insieme di esiti a cui siamo interessati.

Esempio 1: Moneta

- Fenomeno: lancio di una moneta
- $S = \{\text{testa, croce}\}$
- Evento "esce testa": $E = \{\text{testa}\}$

Esempio 2: Dado

- Fenomeno: lancio di un dado a 6 facce
- $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Evento "numero pari": $E = \{2, 4, 6\}$

Gli assiomi di Kolmogorov (1956)

La probabilità $P(\cdot)$ è una funzione che assegna un valore numerico a ogni evento.

1. $P(A) \geq 0$ nessuna probabilità può essere negativa
2. $P(S) = 1$ la somma delle probabilità di tutti gli esiti è 1
3. se $A \cap B = \emptyset$, allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (la probabilità che si verifichi l'uno *oppure* l'altro)

Esempio: dado

Poiché le sei facce sono equiprobabili: $P(1) = P(2) = \cdots = P(6) = a$.

Per l'assioma 2: $6a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$.

La probabilità di ottenere un numero pari è quindi:

$$P(E) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Spazi campionari discreti e continui

Uno spazio campionario si dice **discreto** se i suoi elementi sono numerabili in categorie

- Fenomeno: Numero di errori in un compito
- Spazio Campionario: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$

Uno spazio campionario si dice **continuo** se i suoi elementi non sono direttamente numerabili, ma rappresentano un continuo di valori

- Fenomeno: tempo di risposta (θ)
- Spazio Campionario: $S = \theta > 0$

Variabili aleatorie e distribuzioni di probabilità

Una **variabile aleatoria** è una funzione $X : S \to \mathbb{R}$ che assegna un valore reale a ogni esito dello spazio campionario.

Esempio: nel lancio di una moneta, definiamo $X(\text{croce}) = 0$ e $X(\text{testa}) = 1$.

Una **distribuzione di probabilità** descrive quali valori può assumere X e con che probabilità. Per una moneta equa ($\theta = 0.5$):

$$P(X = x) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x}$$

$$P(X = 0) = 0.5, \quad P(X = 1) = 0.5, \quad P(X = 0) + P(X = 1) = 1,$$

con $X(\text{croce}) = 0$ e $X(\text{testa}) = 1$.

Distribuzioni di probabilità

Una distribuzione di probabilità è l'insieme di tutti gli esiti dello spazio campionario e delle corrispettive probabilità.

- **Fenomeno**: $X =$ esito del lancio di una moneta non truccata; dove X è una variabile aleatoria (casuale) che può assumere i valori $x = 0$ (Croce) e $x = 1$ (Testa).
- **Spazio campionario**: $S = \{0, 1\}$.
- **Distribuzione di probabilità**:

$$\Pr(X = x) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x},$$

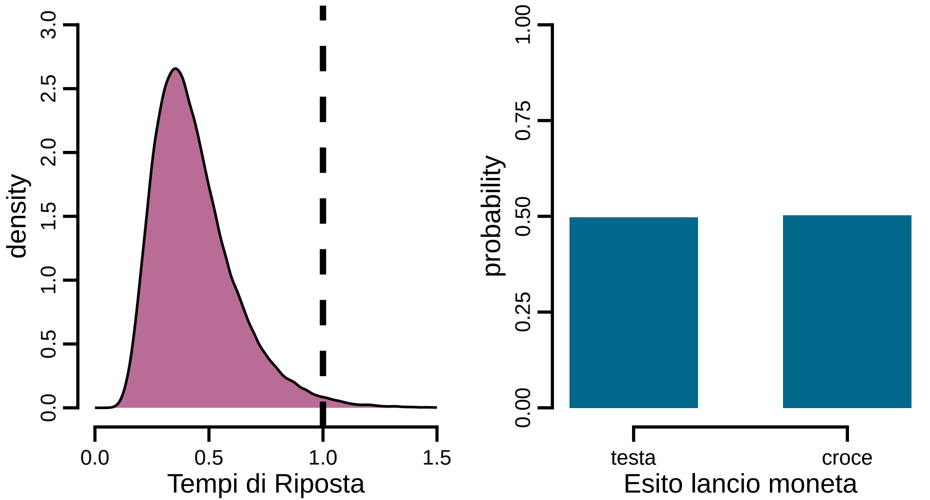
dove $\theta = 0.5$, è il parametro che definisce la distribuzione di probabilità.

Visualizzazione interattiva

	Discreto	**Continuo**
Definizione	Esiti numerabili in categorie	Esiti su un continuum di valori
Esempio	Numero di errori: $S = \{0, 1, 2, ...\}$	Tempo di risposta: $S = \{\theta > 0\}$
Probabilità	$P(X = x) = f(x)$	$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$

Nel caso **continuo**, la probabilità di un singolo valore esatto è sempre zero: ha senso solo chiedersi la probabilità di un **intervallo**. E come si calcola quella probabilità? Come **area sotto una curva**.

Distribuzioni di probabilità



Valore atteso

Data una distribuzione, ci interessano due caratteristiche fondamentali.

Il **valore atteso** è la media ponderata di tutti i valori possibili, con pesi dati dalle probabilità — ovvero il valore "tipico" nel lungo periodo:

$$E(X) = \sum_{x \in X(S)} x \times P(X = x)$$

Per un dado equo: $E(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3.5.$

Non è un esito possibile, ma è la media attesa su moltissimi lanci.

Varianza

La **varianza** misura quanto i valori si disperdono attorno alla media:

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$$

Nella distribuzione normale, valore atteso e varianza corrispondono esattamente a μ e σ^2.

Distribuzioni comuni

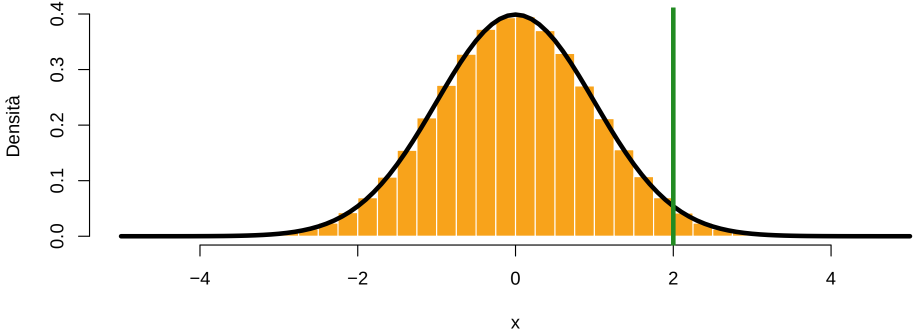
Distribuzione	Supporto	Valore Atteso: $E[Y]$	Varianza: $\mathrm{Var}(Y)$
Normale: $f(x \mid \mu, \sigma^2)$	$x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2
Gamma: $f(x \mid \alpha, \lambda)$	$x \in (0, \infty)$	α/λ	α/λ^2
Binomiale: $f(x \mid n, p)$	$x \in \{0, 1, \dots, n\}$	np	$np(1-p)$
Poisson: $f(x \mid \lambda)$	$x \in \{0, 1, 2, \dots\}$	λ	λ

La distribuzione normale

La **distribuzione normale standard** è una distribuzione di probabilità continua con spazio campionario $S = (-\infty, +\infty)$, media $\mu = 0$ e deviazione standard $\sigma = 1$.

- Un **evento** è un qualsiasi intervallo di valori: ad esempio $Z \geq 2$
- La **probabilità** di quell'evento è l'area sotto la curva in quell'intervallo
- Gli eventi $Z \geq 2$ e $Z < 2$ sono mutuamente **esclusivi** e collettivamente **esaustivi**: formano una partizione di S, e le loro probabilità sommano a 1

La distribuzione normale



La distribuzione normale

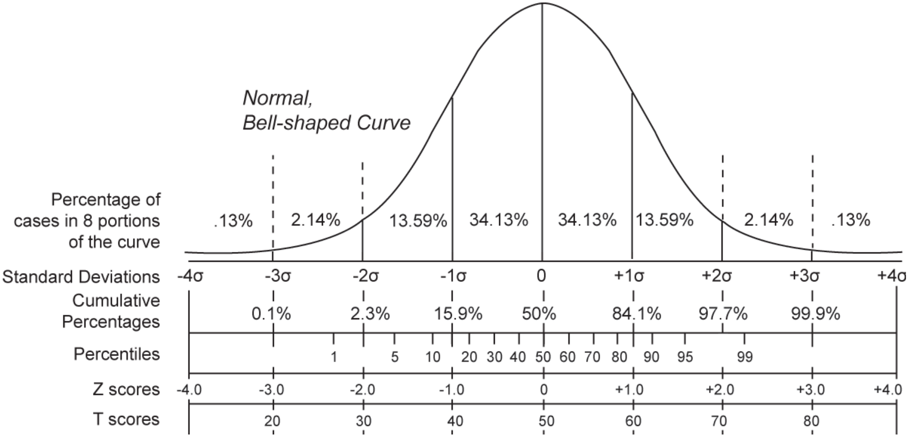


Figure 2: Adattato da **Wikipedia**

Esercizio 1

a. $P(Z \geq 2)$
b. $P(Z \leq -1)$
c. $P(0 \leq Z \leq 1)$

Distribuzioni di probabilità e R

```r
z = rnorm(1e6, mean = 0, sd = 1)

mean(z >= 2)
```

```
[1] 0.022786
```

```r
mean(z <= -1)
```

```
[1] 0.158932
```

```r
mean(z >= 0 & z <= 1)
```

```
[1] 0.341436
```

In R sono disponibili quattro funzioni per ogni distribuzione di probabilità:

- `d*`: calcola la **massa di probabilità** per distribuzioni discrete e la **densità di probabilità** per distribuzioni continue
- `p*`: calcola la **probabilità cumulata** $P(X \leq q)$ dato un quantile
- `q*`: calcola il **quantile** dato un livello di probabilità cumulata
- `r*`: genera un **campione casuale** dalla distribuzione

`*` sta per nome della distribuzione in R, per esempio `rnorm` per la Normale.

Alcune distribuzioni di probabilità in R

Distribuzione	Tipo	Nome R
Binomiale	discreta	`@binom`
Poisson	discreta	`@pois`
Uniforme	continua	`@unif`
Normale	continua	`@norm`
t di Student	continua	`@t`
Beta	continua	`@beta`

Note

`@` = prefisso: `d` oppure `p` oppure `q` oppure `r`
Ad esempio `rnorm()` genera campioni casuali da una Normale, `dbinom()` calcola la probabilità $P(X = x)$ per la Binomiale.

Funzioni per la distribuzione normale

Funzione	Cosa calcola
`dnorm(x, mean, sd)`	Densità in x (altezza della curva nel punto x, **non** una probabilità)
`pnorm(q, mean, sd)`	$P(X \leq q)$ — area a **sinistra** di q
`qnorm(p, mean, sd)`	Il valore x tale che $P(X \leq x) = p$
`rnorm(n, mean, sd)`	Genera n valori casuali dalla Normale

`dnorm()`

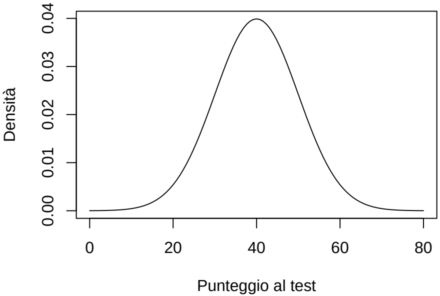
`dnorm()` restituisce la **densità** in un punto, cioè l'altezza della curva in quel punto. Per le distribuzioni continue, la densità **non è una probabilità**: la probabilità di un singolo valore esatto è sempre zero. **Nota**: per le distribuzioni **discrete** (es. Binomiale), `dbinom()` restituisce invece una vera probabilità: $P(X = x)$.

```r
# Densità nella media
dnorm(40, mean = 40, sd = 10)
```

```
[1] 0.03989423
```

```r
# Densità a 2 deviazioni
# standard sopra la media
dnorm(60, mean = 40, sd = 10)
```

```
[1] 0.005399097
```



`pnorm()`

- Dato un valore q, restituisce l'area a sinistra sotto la curva, cioè $P(X \leq q)$.
- Questo sì è una probabilità. Per l'area a destra si usa `lower.tail = FALSE`.
- `pnorm()` accetta direttamente la media e la deviazione standard della distribuzione originale.

Esempio con $\mu = 40$, $\sigma = 10$

```r
# Probabilità di ottenere un punteggio >= 60
pnorm(60, mean = 40, sd = 10, lower.tail = FALSE)
```

```
[1] 0.02275013
```

```r
# Probabilità di punteggio compreso tra 30 e 50
pnorm(50, mean = 40, sd = 10) - pnorm(30, mean = 40, sd = 10)
```

```
[1] 0.6826895
```

qnorm()

- Dato un livello di probabilità cumulata p, restituisce il quantile corrispondente, cioè il valore x tale che $P(X \leq x) = p$.
- È l'inversa di pnorm().

```
# Quale punteggio corrisponde al 5° percentile? (mu = 40, sd = 10)
qnorm(0.05, mean = 40, sd = 10)
```

```
[1] 23.55146
```

```
# E al 95° percentile?
qnorm(0.95, mean = 40, sd = 10)
```

```
[1] 56.44854
```

Dal grezzo alla Normale stardard:

```r
pnorm(60, mean = 40, sd = 10) # probabilità
```

```
[1] 0.9772499
```

```r
# Aa quale quantile corrisponde nella normale standard?
qnorm(0.9772499)
```

```
[1] 2.000001
```

rnorm()

rnorm() genera un campione casuale da una distribuzione Normale.

```r
# Simula i punteggi al test (mu = 40, sd = 10)
punteggi <- rnorm(5, mean = 40, sd = 10)
punteggi
```

```
[1] 37.74127 44.88769 39.66813 37.63815 29.82893
```

```r
# Statistiche del campione simulato
mean(punteggi); sd(punteggi)
```

```
[1] 37.95284
```

```
[1] 5.412395
```

```r
# Simula campione più grande
punteggiN <- rnorm(1000, mean = 40, sd = 10)

# Statistiche del campione simulato
mean(punteggiN); sd(punteggiN)
```

```
[1] 40.65783
```

```
[1] 9.966479
```

Esercizio

Usa `pnorm()` e `qnorm()` per calcolare:

a. $P(Z \geq 2)$
b. $P(Z \leq -1.5)$
c. $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96)$
d. Il valore z corrispondente al 90° percentile

```r
pnorm(2, lower.tail = FALSE)        # a
```

```
[1] 0.02275013
```

```r
pnorm(-1.5)                         # b
```

```
[1] 0.0668072
```

```r
pnorm(1.96) - pnorm(-1.96)          # c
```

```
[1] 0.9500042
```

```r
qnorm(0.90)                         # d
```

```
[1] 1.281552
```

Esercizio: il questionario di stress lavorativo

Il punteggio X di un questionario di **stress lavorativo percepito**, validato su lavoratori adulti in contesti organizzativi italiani, è distribuito normalmente con media $\mu = 50$ e deviazione standard $\sigma = 12$.

Punteggi più alti indicano maggiore stress.

Usa `pnorm()` e `qnorm()` per rispondere alle seguenti domande.

1. Qual è la probabilità che un lavoratore scelto a caso abbia un livello di stress **superiore alla media**?
2. Qual è la probabilità che un lavoratore abbia un punteggio di stress **compreso tra 44 e 56**?
3. Qual è la probabilità che un lavoratore abbia un punteggio **compreso tra la media e la media più una deviazione standard**?
4. Qual è la probabilità che un lavoratore abbia un punteggio **superiore alla media più 1.5 deviazioni standard**?
5. Qual è la probabilità che un lavoratore abbia un punteggio **al di fuori dell'intervallo** $[\mu - 2\sigma,\ \mu + 2\sigma]$?

6. Qual è il **95° percentile** della distribuzione?
7. Sotto quale punteggio si trova il **10% dei lavoratori meno stressati**?
8. Tra quale valore inferiore e quale valore superiore (simmetrici rispetto alla media) si trova il **50% centrale** della distribuzione?
9. Un lavoratore ottiene un punteggio di 70 Dove si colloca il suo punteggio? Quanti lavoratori ci aspettiamo abbiano un punteggio uguale o superiore?

Credits

- Kaplan, R. M., & Saccuzzo, D. P. (2023, p. 53). Psychological Testing: Principles, Applications, and Issues.
- Altoè, G. (2022). Corso di Testing Psicologico, Scienze psicologiche dello sviluppo, della personalità e delle relazioni interpersonali, A.A. 2022/23
- Marci, M. (2025). Corso di Testing Psicologico, Scienze psicologiche dello sviluppo, della personalità e delle relazioni interpersonali, A.A. 2025/26
- **UniVerona**
- **UniChieti**
- **UniBrown**